

// P.S. $y_i \Leftrightarrow y_i$ //

17/03 // The Beginning of Distance Learning //

11.2. Одноэтапный метод Р-К

$$\begin{cases} U_{n+1} - U_n = \tau \sum_{i=1}^s b_i f(y_i), \\ y_i - U_n = \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j), \quad i = \overline{1, s}, \\ U_0 = U(\theta) \end{cases}$$

Тем самым, при $s=1$ получим ф-лы:

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + \tau b_1 f(y_1), \\ y_1 = U_n + \tau a_{11} f(y_1) \end{cases}$$

Как уже отмечалось, г/тому, чтобы ф-лы были точны хотя бы $g/f \equiv 1$ нужно, чтобы $b_1 = 1$.

Таблица Бутчера:

c_1	a_{11}
	b_1

Сначала $\approx$ 2 простейших случая.

$$a_{11} = 0, \quad b_1 = 1$$

1) $a_{11} = 0$ — явный метод

$$\begin{cases} U_{n+1} - U_n = \tau f(y_1), \\ y_1 = U_n \end{cases} \Leftrightarrow \frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = f(U_n) \text{ — явный}$$

метод Эйлера

2) $\alpha_n = 1$ — неявный метод

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = \tau f(y_1), \\ y_1 - u_n = \tau \alpha_n f(y_1) = \tau f(y_1) \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = u_{n+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = f(u_{n+1}) \text{ — неявный метод Эйлера}$$

3) Исследуя погрешность аппроксимации обыкновенного метода Р-К, учитывая, что коэффициент $\alpha_1 = 1$ нами уже определен.

Итак:

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = \tau f(y_1), \\ y_1 - u_n = \tau \alpha_n f(y_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = f(y_1), \\ y_1 = u_n + \tau \alpha_n f(y_1) \end{cases}$$

Замечаем, что u_n — сеточ. ф-ция, и вспоминаем, что $u(t)$ — непр. ф-ция, удовл-щая ур-нию $\frac{du(t)}{dt} = f(u(t))$, а величина $u(t_n)$ — есть знач-е непр. ф-ции в т. сетки (именно ему, $u(t_n)$, и сопоставляется u_n).

Как уже ранее обсуждалось, одно из форм записи погрешности аппроксимации явл-ся

$$\psi_n = - \frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} + f(y_1(u(t_n))),$$
$$y_1 = u(t_n) + \tau \alpha_n f(y_1(u(t_n))), \quad (*)$$

т.е. вместо сеточ. ф-ции в численную схему подставляется знач-е ф-ции $u(t)$ в точке t_n .

Воспоминание

//Ремарка//

Погреш-ть аппр-ции дифер. опер-на $L(u(t))$ сеточ. опер-ом $L_n u_n$ это:

$$\varphi_{1,n} = Lu(t)|_{t=t_n} - L_n u(t_n)$$

Погреш-ть аппр-ции прав. части ур-я $f(u(t))$ сеточ. ф-цией $f_n(u_n)$ это:

$$\varphi_{2,n} = f(u(t_n)) - f_n(u(t_n))$$

Погреш-ть аппр-ции дифер. ур-ния $Lu(t) = f(u(t))$ разностной схемой $L_n u_n = f_n(u_n)$ это величина $\psi_n = \varphi_{1,n} - \varphi_{2,n}$

$$\psi_n = \varphi_{1,n} - \varphi_{2,n} = \underbrace{Lu(t)|_{t=t_n} - L_n u(t_n)}_{\rightarrow \text{в силу ур-ния} = 0} - \underbrace{f(u(t_n)) - f_n(u(t_n))}_{= 0}$$

$\equiv -L_n u(t_n) + f_n(u(t_n))$, т.е. именно (*) $\uparrow$

Мы ищем погреш-ть аппр-ции по шагу τ .

1) Разложим лев. слагаемое по ф-ле Тейлора

в (*) с учетом в т. t_n :

$$\frac{u(t_{n+1}) - u(t_n)}{\tau} = - \left[u(t_n) + \tau u'(t_n) + \frac{\tau^2}{2} u''(t_n) + \right. \\ \left. + O(\tau^3) - u(t_n) \right] \frac{1}{\tau} = - \left[u'(t_n) + \frac{\tau}{2} u''(t_n) + O(\tau^2) \right]$$

Здесь разумеется и далее предполагается, что функции $u(t)$ и f дифференцируемые нужное число раз.

2) Разложим $f(y_1(u(t_n)))$ в т. t_n : это соответствует разложению по τ с учетом в т. $\tau=0$: $f(y_1(u(t_n))) = f(y_1)|_{\tau=0} + \tau \frac{df(y_1)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} + O(\tau^2) \quad (**)$

Вспоминаем, что $y_1 = u(t_n) + \tau a_{11} f(y_1(u(t_n)))$
 $\Rightarrow y_1|_{\tau=0} = u(t_n)$ и это, что $f(y_1)|_{\tau=0} = f(u(t_n))$

Далее, найдем $\frac{df(y_1)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{df(y_1)}{dy_1} \Big|_{\tau=0} \cdot \frac{dy_1}{d\tau} \Big|_{\tau=0}$

Заметим, что $\frac{df(y_1)}{dy_1} \Big|_{\tau=0} = f'_u(u(t_n))$

$$\frac{dy_1}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau} (u(t_n) + \tau a_{11} f(y_1)) \Big|_{\tau=0} = a_{11} f(y_1)|_{\tau=0} + \\ + \tau a_{11} \frac{df(y_1)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = a_{11} f(u(t_n)) \\ = 0, \text{ т. к. } \tau=0$$

Собирая: $\frac{df(y_k)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = f'_u(u(t_n)) a_{k1} f(u(t_n))$

В итоге: из $(**) \Rightarrow f(y_k(u(t_n))) = f(u(t_n)) +$
 $+ \tau a_{k1} f(u(t_n)) f'_u(u(t_n)) + \underline{O(\tau^2)}$

3) Подставляя рез-ты из 1) и 2) в ф-лу
 (*) г/погреш-ти аппр-ции:

$$\begin{aligned} \tau_k &= -u'(t_n) - \frac{\tau}{2} u''(t_n) + \underline{O(\tau^2)} + f(u(t_n)) + \\ &+ \tau a_{k1} f'_u(u(t_n)) f(u(t_n)) + \underline{O(\tau^2)} = \text{заметим,} \\ \text{что из ур-ния } u'_{t_n}(t_n) &= f(u(t_n)) \Rightarrow u'(t_n) = \\ &= f(u(t_n)) \text{ и } u'' = f'_u(u(t_n)) \underbrace{f(u(t_n))}_{=u'} = \\ &= -u'(t_n) + f(u(t_n)) + \frac{\tau}{2} (-\underbrace{f'_u(u(t_n)) f(u(t_n))}_{u''} + \\ &+ 2a_{k1} \underbrace{f'_u(u(t_n)) f(u(t_n))}_{=0}) + \underline{O(\tau^2)} = \frac{\tau}{2} (2a_{k1} - 1) \cdot \end{aligned}$$

$\cdot f'_u(u(t_n)) f(u(t_n)) + \underline{O(\tau^2)} (***)$

Из $(***) \Rightarrow$ // Основной рез-т //

1) $2a_{k1} - 1 \neq 0 \Rightarrow$ погреш-ть имеет 1ый пор-к по τ , это, в том числе, рассмотренные ранее $a_{k1} = 0$ и $a_{k1} = 1$.

2) $a_{k1} = 1/2 \Rightarrow$ погреш-ть имеет 2й пор-к по τ .
 Одноэтапный метод Р-К 2-го пор-ка, тем

сальвы, имеет вид: $U_{n+1} - U_n = \tau f(y_1),$

$$y_1 - U_n = \frac{\tau}{2} f(y_1)$$

// Умножим все уравнения на 2 и вычтем из него 1ое $\Rightarrow 2y_1 - 2U_n - U_{n+1} + U_n = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{U_{n+1} + U_n}{2} \Rightarrow$ метод можно свести к ф-ле:

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = f\left(\frac{U_{n+1} + U_n}{2}\right)$$

П.3. Метод Р-К это пор-ка аппр-ции в общем виде

* общий s-шаговый метод:

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = \sum_{i=1}^s b_i f(y_i)$$

$y_i = U_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j), i = \overline{1, s}$ и найдем усл-я, при τ он будет иметь 3й пор-к аппр-ции. Запишем погреш-ть аппр-ции в виде:

$$-\psi_n = \frac{U(t_{n+1}) - U(t_n)}{\tau} - \sum_{i=1}^s b_i f(y_i(U(t_n)))$$

1) Разложим 1ое слагаемое: $\frac{U(t_{n+1}) - U(t_n)}{\tau} =$

$$= \frac{1}{\tau} [U(t_n) + \tau U'(t_n) + \frac{\tau^2}{2} U''(t_n) + \frac{\tau^3}{6} U'''(t_n) + O(\tau^4) - U(t_n)]$$

$$= U'(t_n) + \frac{\tau}{2} U''(t_n) + \frac{\tau^2}{6} U'''(t_n) + \underline{O}(\tau^3)$$

2) Разложим ее по $\underline{O}(\tau^3)$. Как и в П.2, $f(y_i) = f(y_i(u(t_n))) = F(\tau)$ (здесь от τ) разлагаем ее в точке $\tau=0$:

$$f(y_i(u(t_n))) = f(y_i)|_{\tau=0} + \tau \frac{df(y_i)}{d\tau}|_{\tau=0} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 f}{d\tau^2}|_{\tau=0} + \underline{O}(\tau^3)$$

Как уже было в П.2: $y_i|_{\tau=0} = [u(t_n) + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j)]|_{\tau=0} = u(t_n), i = \overline{1, s} \Rightarrow [f(y_i)|_{\tau=0} = f(u(t_n)), i = \overline{1, s}]$

для производная $\frac{df(y_i)}{d\tau}|_{\tau=0} = \frac{df(y_i)}{dy_i}|_{\tau=0} \cdot \frac{dy_i}{d\tau}|_{\tau=0}$

Опять же, как и в П.2: $\frac{df(y_i)}{dy_i}|_{\tau=0} = f'_i(y_i)|_{\tau=0} = f'_i(u(t_n))$

$$\frac{dy_i}{d\tau}|_{\tau=0} = \frac{d}{d\tau} [u(t_n) + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j)]|_{\tau=0} = \sum_{j=1}^s a_{ij} \underbrace{f(y_j)|_{\tau=0}}_{f(u(t_n))} +$$

$$+ \left(\tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{df(y_j)}{d\tau} \right) \Big|_{\tau=0} \overset{0, \text{ т.к.}}{=} \sum_{j=1}^s a_{ij} f(u(t_n)) = f(u(t_n))$$

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i f(u(t_n))$$

c_i (таблица Бутчера)

П.0. $\boxed{\frac{df(y_i)}{d\tau}|_{\tau=0} = f'_i(u(t_n)) c_i f(u(t_n)), i = \overline{1, s}}$

$$\frac{d^2 f(y_i)}{dt^2} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{df(y_i)}{dt} \right) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{df(y_i)}{dy_i} \frac{dy_i}{dt} \right) \Big|_{t=0} = \left[\frac{d^2 f(y_i)}{dy_i^2} \left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 + \frac{df(y_i)}{dy_i} \frac{d^2 y_i}{dt^2} \right] \Big|_{t=0}$$

Аналогично, как в п. 2:

$$\frac{d^2 f(y_i)}{dy_i^2} \Big|_{t=0} = f''_{uu}(u(t_n)),$$

$$\left(\frac{dy_i}{dt} \right)^2 \Big|_{t=0} = (c_i f(u(t_n)))^2$$

$$\frac{df(y_i)}{dy_i} \Big|_{t=0} = f'_u(u(t_n))$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \left[u(t_n) + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j) \right] \right] \Big|_{t=0} =$$

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^s a_{ij} f(y_j) + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{df(y_j)}{dt} \right] \Big|_{t=0} = \left\{ \sum_{j=1}^s a_{ij} \underbrace{\frac{df(y_j)}{dt}}_{\text{уже вычисл.}} + \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{df(y_j)}{dt} + \tau \frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{df(y_j)}{dt} \right] \right\} \Big|_{t=0} =$$

$$= 2 \sum_{j=1}^s a_{ij} \frac{df(y_j)}{dt} \Big|_{t=0} = \{ \text{неграблем } \frac{df(y_j)}{dt} \Big|_{t=0} \}$$

$$= 2 \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j f'_u(u(t_n)) f(u(t_n)) \Rightarrow \frac{d^2 y_i}{dt^2} \Big|_{t=0} =$$

$$= 2 f(u(t_n)) f'_u(u(t_n)) \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j, \quad i = \overline{1, s}$$

Тем самым: $\left[\frac{d^2 f(y_i)}{dt^2} \right]_{t=0} = f''_{uu} c_i^2 f^2 + f'_u \cdot 2 f f'_u \cdot \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j$. Здесь и далее до конца пункта:

$$f = f(u(t_n)), f'_u = f'_u(u(t_n)), f''_{uu} = f''_{uu}(u(t_n)) - g/$$

сокращения записи

Собираем полученные выраз-я в ф-лу g/ψ_n , при этом учтем, что $u' = f$, $u'' = f'_u f$, $u''' = f''_{uu} f^2 + f'^2_u f$:

$$-\psi_n = \underbrace{f}_{(1)} + \frac{\tau}{2} \underbrace{ff'}_{(2)} + \frac{\tau^2}{6} [\underbrace{f''_{uu} f^2}_{(3)} + \underbrace{f'^2_u f}_{(4)}] - \sum_{i=1}^s b_i [f + \tau c_i \underbrace{f'_u f}_{(2)} + \frac{\tau^2}{2} (\underbrace{f''_{uu} f^2}_{(3)} c_i^2 + 2f \underbrace{f'^2_u}_{(4)} \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j)] + \underline{O}(\tau^3),$$

// (1), (2), (3), (4) — подробные члены //

$$-\psi_n = f [1 - \sum_{i=1}^s b_i] + \frac{\tau}{2} f' f [1 - 2 \sum_{i=1}^s b_i c_i] + \frac{\tau^2}{6} \cdot f''_{uu} f^2 [1 - 3 \sum_{i=1}^s b_i c_i^2] + \frac{\tau^2}{6} f'^2_u f [1 - 6 \sum_{i=1}^s b_i \sum_{j=1}^s a_{ij} c_j] + \underline{O}(\tau^3)$$

Т.о., получаем усл-я 3-го пор-ка аппр-ции:

$$\left[\begin{aligned} \sum_{i=1}^s b_i &= 1 \text{ (уже выполненное)} \\ \sum_{i=1}^s b_i c_i &= \frac{1}{2} \\ \sum_{i=1}^s b_i c_i^2 &= \frac{1}{3} \\ \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s b_i a_{ij} c_j &= \frac{1}{6} \end{aligned} \right]$$

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}, i = \overline{1, s}$$